



Серия №27. Орграфы

17 июля

Определения. Оргграф – граф, где вместо ребер – стрелки. Сильно связный оргграф – от любой вершины до любой другой есть путь по стрелкам. Слабо связный оргграф – связный, если заменить стрелки ребрами. Турнир – полный оргграф.

1. Докажите, что в любом турнире на хотя бы трёх вершинах можно поменять направление не более чем одного ребра так, чтобы турнир стал сильно связным.
2. Докажите, что сильная связность оргграфа равносильна следующему условию: при любом разбиении множества его вершин на два непустых подмножества A и B найдётся стрелка из вершины, содержащейся в A , в вершину, содержащуюся в B . Что в данном случае означает отсутствие сильной связности?
3. Оргграф не сильно связан.
 - а) Пусть a – одна из вершин. Докажите, что можно выделить сильно связную компоненту – множество вершин A , содержащее a , что для любой вершины b из A существуют пути из a в b и из b в a , а для любой вершины c не из A это неверно.
 - б) Рассмотрим конденсацию графа – граф, где вершины соответствуют сильно связным компонентам, а стрелки – направлению стрелок между этими компонентами. Докажите, что конденсация не содержит циклов.
4. В оргграфе $2n$ вершин, причем степени исхода и захода каждой вершины больше 0. Докажите, что в граф можно добавить не более n стрелок так, что граф станет сильно связным. Можно проводить более одной стрелки между двумя вершинами.
5. **Теорема Муна.** Пусть дан сильно связный турнир на n вершинах и натуральное число k , где $3 \leq k \leq n$. Тогда:
 - а) есть цикл длины k , проходящий через данную вершину;
 - б) циклов длины k не менее $n - k + 1$;
6. **Теорема Редди-Камиона.** Докажите, что в сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.
7. Докажите, что в любом сильно связном турнире, содержащем хотя бы 4 вершины, можно найти две вершины A и B таких, что удаление любой одной из вершин A и B не нарушает сильную связность.